Билет 8
Описание модели Рамсея. Магистральное свойство сбалансированного роста.

Односекторная экономику, совокупность независимых производителей, выпускает однородный продукт

Уравнения модели:

$$\begin{cases} Y(t) = C(t) + I(t), C(t) \geq 0, I(t) \geq 0 \\ Y(t) = M(t) f\left(\frac{L(t)}{M(t)}\right) \\ \frac{dM(t)}{dt} = -\mu M(t) + \frac{I(t)}{b} \\ \frac{dN(t)}{dt} = nL(t) \to L(t) = L_0 e^{nt} \\ s(t) = \frac{I(t)}{Y(t)} \\ C(t) = (1 - s(t))Y(t) \\ M(0) = M_0; L(0) = L_0 \end{cases}$$

Y(t) - Весь произведенный продукт в единицу времени
C(t) – Часть произведённого продукта, отданная потребителям
I(t) - Часть произведённого продукта, отданная производителям (новые произв. мощн)
F - производственной функцией определяет зависимость объема производства от количества затрачиваемых факторов производства, f(x) – функция загрузки мощности
M(t) – масштабирует распределение мощностей (производственные мощности)
μ - темп выбытия (мощности стареют и эта часть постоянно убирается из процесса)
B – приростная фондоёмкость
L(t) – рабочая сила. Состоит из постоянной доли населения, которое растёт с темпом n
s(t) – норма накопления (определяет какая доля дохода идёт на накопление, а какая на потребление)

(3.16). Перейдем к новым переменным – фондовооруженности труда $k(t) = \frac{bM(t)}{L(t)}$ и потреблению на душу населения $c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}$. Тогда $\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{M(t)}{L(t)} f\left(\frac{L(t)}{M(t)}\right) = \frac{k(t)}{b} f\left(\frac{b}{k(t)}\right) \stackrel{def}{=} \tilde{f}(k(t))$

и

Обозначив для краткости $\lambda = n + \mu$, получим, что модель (3.12)-(3.16) принимает вид:

$$\frac{dk(t)}{dt} = s(t)\tilde{f}(k(t)) - \lambda k(t), \qquad (3.17)$$

$$c(t) = (1 - s(t))\tilde{f}(k(t)), \qquad (3.18)$$

$$k(0) \stackrel{def}{=} k_0 = \frac{bM_0}{L_0}, \qquad 0 \leq s(t) \leq 1. \qquad (3.19)$$

Сначала рассмотрим самый простой случай. Пусть доля накопления является постоянной: $s(t) \equiv s = const$. Найдем стационарные (равновесные) точки уравнения (3.17), т.е. такие значения $\bar{k}$, что при $k_0 = \bar{k}$ решением уравнения (3.17) будет функция $k(t) \equiv \bar{k}$. Для того чтобы найти все такие $\bar{k}$, надо найти все решения уравнения $\frac{dk(t)}{dt} = 0$, или

$$s\tilde{f}(k) - \lambda k = 0. \tag{3.20}$$

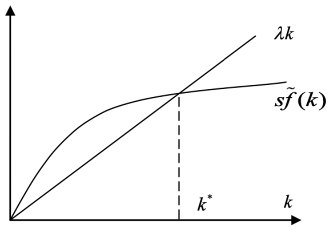


Рис. 4

Решение k=0 существует всегда поскольку для неоклассческой пр. функция f(0)=0
Второго решения нет, если прямая всегда выше кривой, но это невозможно из-за условий Инады на произв. ф-ию –при стремлении к нулю у неё бесконечно большая производная; прямая не может быть всегда ниже кривой из-за второго условия Инады на бесконечности: она растёт медленнее аргумента.

Условия Инады:

$$\lim_{x_i \to 0} F'_{x_i} = \infty, \ \lim_{x_i \to \infty} F'_{x_i} = 0$$

Поскольку пр. ф-ия вогнута, то существует ровно одно пересечение с прямой.
Для всех точек k<k* верно: k(t)’>0 т.е. ф-ия возрастает, для k>k* обратное, сл-но k* - устойчивое равновесие, к которому стремится любое решение.

Если $k = k^*$ для модели (3.17)-(3.19), то для модели (3.12)-(3.16) имеем:

$$M(t) = \frac{k(t)L(t)}{b} = \frac{1}{b} k^* L_0 e^{nt}, \quad Y(t) = L(t)\tilde{f}(k(t)) = \tilde{f}(k^*)L_0 e^{nt},$$

$$C(t) = (1-s)\tilde{f}(k^*)L_0 e^{nt}, \ J(t) = sL_0 e^{nt}.$$

Таким образом, все переменные растут с одинаковым темпом. Такую ситуацию называют ***режимом сбалансированного роста***. Для описанной модели он обладает тем свойством, что к нему сходятся все траектории модели при постоянной норме накопления.

Добавим критерий оптимальности траектории - уровень потребления на одного трудящегося

$$c(s) = \tilde{f}(k^*(s)) - \lambda k^*(s).$$

$$\frac{d}{ds}(\tilde{f}(k^*(s)) - \lambda k^*) = 0 \ \text{или} \ (\tilde{f}'(k^*) - \lambda)\frac{dk^*(s)}{ds} = 0.$$

Из условия (3.20) в силу того, что $\lim_{k \to \infty} \frac{\tilde{f}(k)}{k} = 0$, $\frac{dk^*(s)}{ds} > 0$, необходимое условие максимума имеет вид $\tilde{f}'(k^*) = \lambda = n + \mu$ Это соотношение носит название ***правила золотого накопления, или правила Солоу***.

Рассмотрим вариант неконстантной нормы накопления

Динамическая оптимальность:

С учетом начальной системы необходимо найти максимум функционала $\langle y \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{C(t)}{N(t)} dt$

В качестве фазовой переменной берем $k(t) = \frac{bM(t)}{N(t)}$, а в качестве управляющего воздействия $s(t) = \frac{I(t)}{Y(t)}$, с учетом $Y(t) = N(t)\tilde{f}\big(k(t)\big)$.

Тогда $k' = \frac{bM'N - bMN'}{N^2} = \frac{bM'}{N} - \frac{bMN'}{N^2} = k\left(\frac{M'}{M} - \frac{N'}{N}\right) = k\left(\frac{I}{bM} - (n+\mu)\right) = k\left(\frac{sY}{bM} - (n+\mu)\right) = k\left(\frac{sN\tilde{f}(k)}{bM} - (n+\mu)\right) = s(t)\tilde{f}\big(k(t)\big) - (n+\mu)k(t)$

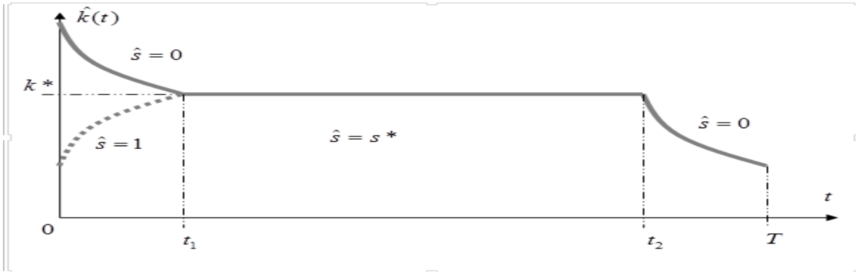
$C(t) = Y(t) - I(t) = Y(t)\big(1 - s(t)\big) = N(t)\tilde{f}\big(k(t)\big)\big(1 - s(t)\big)$

Приходим к следующей задаче оптимального управления:

$$\begin{cases} \int_0^T \tilde{f}\big(k(t)\big)\big(1 - s(t)\big)dt \to max \\ s(t) \in [0;1] \\ k(0) = \dfrac{bM_0}{N_0} \\ \dfrac{dk}{dt} = s(t)\tilde{f}\big(k(t)\big) - (n+\mu)k(t) \end{cases}$$

Гамильтониан данной системы: $H(k,q,s) = q\left(s(t)\tilde{f}\big(k(t)\big) - (n+\mu)k(t)\right) + \tilde{f}(k(t))(1 - s(t))$

При достаточно большом горизонте планирования график фазовой переменной имеет следующий вид:



Магистральное свойство сбалансированного роста:

Если при фиксированном начальном условии k_0 увеличивать горизонт планирования T, то все большая часть оптимальной траектории будет совпадать со сбалансированным ростом, а значение функционала на оптимальной траектории будет приближаться к значению душевого потребления на оптимальном сбалансированном росте. Это явление – слабая зависимость оптимальных траекторий от начальных условий (а фактически и от конкретного вида функционала) при больших горизонтах планирования – называется магистральным свойством.